(60) 24/11

Ορισμός

(E,ρ) μ.χ. $f:E\to E$, f συστολή $\iff$
$(\exists \vartheta\in[0,1))(\forall x,y \in E): \rho(f(x),f(y)) \le \vartheta\rho(x,y)$

<u>Θεώρημα</u> (Αρχή της συστολής)

Εστω (E,ρ) πλήρης μ.χ. κ $f:E\to E$ μία συστολή. Τότε η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στον E, δηλ υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha\in E: f(\alpha)=\alpha$

<u>Απόδειξη</u>

Εστω x_0 τυχόν σημείο στο μ.χ. E. Ορίζουμε την ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E, με τον τύπο $x_\nu=f(x_{\nu-1})$, $\nu\in\mathbb{N}$.

Θ.δ.ο. η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική (?) τότε η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, γιατί ο E είναι πλήρης. Άρα $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu=\alpha\in E$.

Τότε, επειδή η f είναι συνεχής έχουμε:

$f(\alpha)=f(\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu) \xlongequal{f \text{ συνεχής}} \lim_{\nu\in\mathbb{N}} f(x_\nu)=\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_{\nu+1}=\alpha$ (επειδή $x_{\nu+1}$ είναι υπακολουθία της x_ν)

ii) <u>Μοναδικότητα του α</u>

Εστω ότι η f έχει δύο σταθερά σημεία α κ β

$\rho(\alpha,\beta)=\rho(f(\alpha),f(\beta))\le\vartheta\rho(\alpha,\beta)\implies\rho(\alpha,\beta)(1-\vartheta)\le 0 \xRightarrow{\rho(\alpha,\beta)\ge 0}$
$1-\vartheta\le 0\implies\vartheta\ge 1$ ΑΤΟΠΟ άρα α μοναδικό

iii) <u>(?): η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική</u>

$\rho(x_\nu,x_{\nu+1})=\rho(f(x_{\nu-1}),f(x_\nu))\le\vartheta\rho(x_{\nu-1},x_\nu)\le\vartheta\cdot\vartheta\cdot\rho(x_{\nu-2},x_{\nu-1})=$
$=\vartheta^2\cdot\rho(x_{\nu-2},x_{\nu-1})\le\ldots\le\vartheta^\nu\rho(x_0,x_1)$, $\nu\in\mathbb{N}$

$m<n: \rho(x_m,x_n)\le\rho(x_m,x_{m+1})+\rho(x_{m+1},x_{m+2})+\ldots+\rho(x_{n-1},x_n)\le$
$\le\vartheta^m\rho(x_0,x_1)+\vartheta^{m+1}\rho(x_0,x_1)+\ldots+\vartheta^{n-1}\rho(x_0,x_1)=$
$=\vartheta^m(1+\vartheta+\vartheta^2+\ldots+\vartheta^{n-1-m})\rho(x_0,x_1)\le\vartheta^m\rho(x_0,x_1)(1+\vartheta+\vartheta^2+\ldots+\ldots)\xlongequal{\text{ΑΠΕΙ 1}}$
$\vartheta^m\rho(x_0,x_1)\frac{1}{1-\vartheta}=\frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\vartheta}\vartheta^m$

$m<n: \rho(x_m,x_n)\le\frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\vartheta}\vartheta^m$ (*), $\lim_{m\to+\infty}\vartheta^m=0$ γιατί $0\le\vartheta<1$.

Θεωρώ $\varepsilon>0$ άρα $(\exists n_0)(\forall\nu>n_0): \vartheta^\nu<\varepsilon$

Αν $m>n_0$ (οπότε κ $n>n_0$, γιατί $n>m$), τότε από (*) έχουμε
$\rho(x_m,x_n)<\left(\frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\vartheta}\right)\varepsilon$ Άρα η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική

Πρόταση 1

Έστω $f: E \to E$ συνάρτηση να υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, με $\overset{m}{\circ}f$ συστολή $\left(\overset{m}{\circ}f = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m-\text{φορές}}\right)$

Τότε, αν ο E είναι πλήρης μ.χ., η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(1)=1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ f(0)=1 & \text{αν } x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f\circ f \text{ σταθερή με } f\circ f(x)=1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Ενώ η f δεν είναι συστολή (γιατί δεν είναι συνεχής), η $f \circ f$ είναι συστολή (γιατί η $f\circ f$ είναι σταθερή συνάρτηση)

Απόδειξη πρόт. 1

Αφού η $\overset{m}{\circ}f$ είναι συστολή και ο E είναι πλήρης μ.χ. υπάρχει $a \in E : \overset{m}{\circ}f(a) = a$

$f(a) = f(\overset{m}{\circ}f(a)) = f(\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m \text{ φορές}}) = \overset{m}{\circ}f(f(a)) \Rightarrow f(a)$ σταθερό σημείο της $\overset{m}{\circ}f$ άρα $\overset{m}{\circ}f$ συστολή. Άρα $a = f(a)$. Δηλ. η f έχει σταθερό σημείο

Η απόδειξη θα είναι πλήρης αν αποδείξω την μοναδικότητα του a

Π.χ.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f παραγωγίσιμη

$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (\exists z \in (x,y)) : f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$

$|f(x)-f(y)| \leq |f'(z)|\,|x-y|$

Αν η f έχει φραγμένη παράγωγο με φράγμα $\theta < 1$ τότε

$|f(x)-f(y)| \leq \theta |x-y|$, $0 \leq \theta < 1$

Συναρτήσεις με φραγμένη παράγωγο μικρότερη του 1 τότε είναι συστολή

(62)

<u>Πχ</u>

$(\mathbb{R}, |\,|)$ πλήρης μ.χ.

$(\mathbb{Q}, |\,|)$

$\mathbb{Q} \neq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$ όχι κλειστό $\Rightarrow \mathbb{Q}$ όχι πλήρες

Το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό?

$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1) = \mathbb{R} - \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^c$ ανοιχτό $\Rightarrow \mathbb{Z}$ κλειστό

Ομοίως $\mathbb{N}^c = \left((-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2,3) \cup \ldots\right)^c$ άρα $\mathbb{N}^c$ ανοιχτό $\Rightarrow \mathbb{N}^c$ κλειστό